6

(35 点)

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する．

(1) 石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2) 石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ．

(2013 年　京都大学前期理系)

[解答例](A25)

(1)

移動の規則より，硬貨を投げて表が出たとき座標 x にある石は $-x$ に移り，裏が出たとき $-x+2$ に移る．

よって，はじめ x の点にあった石が二回硬貨を投げたときどの点に移動するかを，一回目に投げた硬貨の裏表を縦軸，二回目に投げた硬貨の裏表を横軸として，表にまとめると下表の通り．

表 1

1\2	表	裏
表	x	$x+2$
裏	$x-2$	x

よって，求める確率は $\frac{1}{2}$.

(2)

$2n$ 回硬貨を投げるということを 2 回硬貨を投げるという試行 X を n 回繰り返すことだと考える．

(1) の表より，試行 X による石の座標の変化は次の 3 つの事象に分けられる．

1. $+2$ だけ増える (事象 A)
2. 変化しない (事象 B)
3. -2 だけ減る (事象 C)

また，事象 A, B, C の起こる確率はそれぞれ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ である．

以上より，原点にあった石の座標は何回試行 X を繰り返しても偶数である．

また，n 回試行 X を繰り返した後，原点にあった石の座標が x となる確率を $P_{n,x}$ とおく．すると，任意の自然数 n と任意の偶数 x に対して，

$$P_{n+1,x} = \frac{1}{4}P_{n,x-2} + \frac{1}{2}P_{n,x} + \frac{1}{4}P_{n,x+2}$$

という関係が成り立つ．事象 A, B, C では石の座標は 2 以上変化しないから，n 回試行 X を繰り返したときの石の座標は $2n$ 以下だと帰納的に分かる．よって，$P_{n,2n+2} = P_{n,2n+4} = 0$ なので，任意の n で

$$\begin{cases} P_{n+1,2n+2} = \frac{1}{4}P_{n,2n} \\ P_{n+1,2n} = \frac{1}{4}P_{n,2n-2} + \frac{1}{2}P_{n,2n} \end{cases} \tag{1}$$

という関係が成り立つ．$n=0$ のとき，石は原点にあるので $P_{1,2}=\frac{1}{4}$．よって，漸化式 (1) と合わせ，任意の n で

$$P_{n,2n}=\frac{1}{4^n}$$

と求められる．これを漸化式 (1) に代入すると，任意の n で

$$P_{n+1,2n}-2\frac{n+1}{4^{n+1}}=\frac{1}{4}\left(P_{n,2n-2}-2\frac{n}{4^n}\right) \tag{2}$$

が成り立つと分かる．$P_{1,0}=\frac{1}{2}$ なので，漸化式 (2) と合わせ，任意の n に対して，

$$P_{n,2n-2}=2\frac{n}{4^n}=\frac{n}{2^{2n-1}}.$$

$P_{n,x}$ の定め方より，これが求める確率．
(解答終)