

1

(30 点)

平行四辺形 $ABCD$ において、辺 AB を $1:1$ に内分する点を E 、辺 BC を $2:1$ に内分する点を F 、辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし、線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき、比 $AP:PQ$ を求めよ。

(2013 年 京都大学前期理系)

[解答例](AA20)

$\vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{AD}$ とおく。このとき、点 E, F, G の定義より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{AF} &= \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d} \\ \overrightarrow{AG} &= \frac{1}{4}\vec{b} + \vec{d}. \end{aligned}$$

点 P は線分 CE 上の点であるので、実数 s を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= s\overrightarrow{AE} + (1-s)\overrightarrow{AC} \\ &= (1-\frac{1}{2}s)\vec{b} + (1-s)\vec{d} \quad \dots\dots\dots ① \end{aligned}$$

と表せる。点 P は線分 FG 上の点であるので、実数 t を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= t\overrightarrow{AF} + (1-t)\overrightarrow{AG} \\ &= (\frac{1}{4} + \frac{3}{4}t)\vec{b} + (1-\frac{1}{3}t)\vec{d} \quad \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

とも表せる。 \vec{b} と \vec{d} はそれぞれ平行四辺形の隣接する辺なので一次独立。よって式 1,2 の係数は等しく、連立方程式

$$\begin{aligned} 1 - \frac{s}{2} &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t \\ 1 - s &= 1 - \frac{t}{3} \end{aligned}$$

が成り立ち、これを解くと

$$(s, t) = \left(\frac{3}{11}, \frac{9}{11}\right)$$

と求められるので、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{19}{22}\vec{b} + \frac{8}{11}\vec{d}$$

である。点 Q は AP と BC の交点なので、

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{b} + \frac{16}{19}\vec{d}$$

と表せる。よって、

$$AP : PQ = 19 : 3.$$

(解答終)



この文書は、注のある部分を除き、クリエイティブ・コモンズ 表示 - 継承 4.0 国際 ライセンス (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>) の下に公開されています。