$\boxed{1}$

(30 点)

平行四辺形 $ABCD$ において，辺 AB を $1:1$ に内分する点を E，辺 BC を $2:1$ に内分する点を F，辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 $AP:PQ$ を求めよ．

(2013 年　京都大学前期理系)

[解答例](AA20)

$\vec{b}=\overrightarrow{AB}, \vec{d}=\overrightarrow{AD}$ とおく．このとき，点 E, F, G の定義より，

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{b}$$
$$\overrightarrow{AF}=\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}$$
$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d}.$$

点 P は線分 CE 上の点であるので，実数 s を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=s\overrightarrow{AE}+(1-s)\overrightarrow{AC}\\&=(1-\frac{1}{2}s)\vec{b}+(1-s)\vec{d}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots ①$$

と表せる．点 P は線分 FG 上の点であるので，実数 t を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=t\overrightarrow{AF}+(1-t)\overrightarrow{AG}\\&=(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}t)\vec{b}+(1-\frac{1}{3}t)\vec{d}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots ②$$

とも表せる．$\vec{b}$ と $\vec{d}$ はそれぞれ平行四辺形の隣接する辺なので一次独立．よって式 1,2 の係数は等しく，連立方程式

$$1-\frac{s}{2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}t$$
$$1-s=1-\frac{t}{3}$$

が成り立ち，これを解くと

$$(s,t) = (\frac{3}{11}, \frac{9}{11})$$

と求められるので，

$$\overrightarrow{AP} = \frac{19}{22}\vec{b} + \frac{8}{11}\vec{d}$$

である．点 Q は AP と BC の交点なので，

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{b} + \frac{16}{19}\vec{d}$$

と表せる．よって，

$$AP : PQ = 19 : 3.$$

（解答終）